Respuestas Segundo Parcial MA-1111 (TIPO 1-A).

1. (a) (4 puntos)

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{9x^2+x} \;-\; 3x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{9x^2+x} \;-\; 3x)(\sqrt{9x^2+x} \;+\; 3x)}{(\sqrt{9x^2+x} \;+\; 3x)} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{9x^2+x \;-\; 9x^2}{\sqrt{9x^2+x} \;+\; 3x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{9x^2+x} \;+\; 3x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{9+\frac{1}{x}} \;+\; 3} = \frac{1}{6}$$

(b) (4 puntos)

$$\lim_{x\to 3} \frac{1-\cos(3x-9)}{4\operatorname{sen}(3x-9)} = \lim_{y\to 0} \frac{1-\cos(y)}{4\operatorname{sen}(y)} = \lim_{y\to 0} \left(\frac{1-\cos(y)}{y}\right).\left(\frac{y}{\operatorname{sen}(y)}\right).\frac{1}{4} = 0.1.\frac{1}{4} = 0$$

2. (a) (2 puntos)

Dominio$(f) = (-\infty, 2]$, Rango$(f) = [4, \infty)$

(b) (2 puntos)

Si $x_1, x_2 \in (-\infty, 2]$

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_2) \\ 4+\sqrt{6-3x_1} &= 4+\sqrt{6-3x_2} \\ \sqrt{6-3x_1} &= \sqrt{6-3x_2} \\ 6-3x_1 &= 6-3x_2 \\ -3x_1 &= -3x_2 \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

O explicar que cualquier recta horizontal que corta a $y = f(x)$ lo hace en un único punto.

(c) (3 puntos)

$$\begin{aligned} y &= 4+\sqrt{6-3x} \\ y-4 &= \sqrt{6-3x} \\ (y-4)^2 &= 6-3x \\ (y-4)^2-6 &= -3x \\ \frac{6-(y-4)^2}{3} &= x \end{aligned}$$

Entonces $f^{-1}(x) = \dfrac{6-(x-4)^2}{3}$ y Dominio(f^{-1}) = Rango$(f) = [4, \infty)$

3. (7 puntos)

$f(0) = 5$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\text{sen}(ax)}{3x} = \lim_{x \to 0^-} \Big(\frac{\text{sen}(ax)}{ax}\Big).\frac{a}{3} = 1.\frac{a}{3} = \frac{a}{3}$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x + 2b = 2b$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$

$f(0) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$

Entonces $5 = \dfrac{a}{3} = 2b$. Por lo tanto, $a = 15$ y $b = \dfrac{5}{2}$

4. (7 puntos)

Asíntotas Verticales:

$x = 2$ es una asíntota vertical pues:

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{-x^2 + x + 2}{x^2 - 4x + 4} = \lim_{x \to 2^+} \frac{-(x-2)(x+1)}{(x-2)^2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{-(x+1)}{(x-2)} = -\infty.$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{-x^2 + x + 2}{x^2 - 4x + 4} = \lim_{x \to 2^-} \frac{-(x-2)(x+1)}{(x-2)^2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{-(x+1)}{(x-2)} = \infty.$$

Asíntotas Horizontales:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{-x^2 + x + 2}{x^2 - 4x + 4} = \lim_{x \to \infty} \frac{-1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}} = -1$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x^2 + x + 2}{x^2 - 4x + 4} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}} = -1$$

Entonces $y = -1$ es asíntota horizontal a derecha y a izquierda.

Asíntotas Oblicuas: No tiene.

5. (a) (2 puntos)

Sea f una función continua en $[a, b]$. Si M es un valor entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que:

$$f(c) = M$$

(b) (4 puntos)

Considero la función $f(x) = x^4 - 2\sqrt[3]{x} - 1$ en el intervalo $[0, 8]$.

i. $f(x)$ es continua en $[0, 8]$ pues es suma de funciones continuas en $\mathbb{R}$.

ii. $-1 = f(0) < 0 < f(8) = 4.091$

Por el Teorema del Valor Intermedio existe un $c \in (0, 8)$ tal que:

$$f(c) = 0$$

Como $f(c) = c^4 - 2\sqrt[3]{c} - 1$, se tiene que $c^4 - 2\sqrt[3]{c} = 1$ y, por lo tanto, c es solución de la ecuación dada.